EXERCICES

EXERCICE 1©

1°/ Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, \text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \text{Log}\, x \quad (n \geq 2)$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Log}(\cos x)}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\, x}{x^n}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \text{Log}(x^2+1)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\text{Log}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\text{Log}\, x)^2 - 3}{2\log x + 4}$

2°/ Résoudre dans IR les équations suivantes :

- $\text{Log}(x+1) + \text{Log}(x+3) = \text{Log}(x-4)$
- $2\,\text{Log}(x-2) = \text{Log}(x+3)$
- $(\text{Log}\, x)^2 - 3\,\text{Log}\, x + 2 = 0$
- $(\text{Log}\, x)^3 - \text{Log}\, x = 0$

3°/ Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

- $\text{Log}(x^2 - x) + \text{Log}\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0.$
- $\text{Log}\, x - 2 \geq \frac{4}{\text{Log}\, x}.$
- $\text{Log}\, x > \text{Log}\, 2 - 1.$
- $3\,\text{Log}(x-1) \leq \text{Log}(x-1).$

EXERCICE 2 ©

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$ et F la primitive sur IR de f qui s'annule en 0.

1°/ a) Montrer que pour tout $x \in IR_+$ on a : $F(x) \geq \text{Log}(2x+1)$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

b) Montrer que F est impaire et calculer $\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

2°/ Soit G la fonction définie par $G(x) = \text{Log}(2x + \sqrt{1+4x^2})$;

$x \in IR$.

a) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a $G(x) = F(x)$.
b) Montrer que F réalise une bijection de IR dans IR.

3°/ Déterminer la primitive H sur IR de la fonction : $x \mapsto \frac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}$

telle que $H(0) = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 3 ©

1°/ Etudier les variations de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 - \text{Log } x$.

2°/ En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $\text{Log } x \leq x - 1$

3°/ Soient $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$; n nombres strictement positifs non tous égaux à 1 .

On pose $u_k = \frac{x_k}{M}$; $k = 1,2,3 \ldots, n$ avec $M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

a) Montrer qu'on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k \le \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.(utiliser 2°/).

b) En déduire que : $\sqrt[n]{x_1 \,.\, x_2 \,.x_3 \ldots . x_k} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ et que

$$n\,! \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

EXERCICE 4 ©

1°/ Etablir que pour tout $x \ge 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \le \text{Log}(x+1) \le x$.

2°/ Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{pour tout } n \in IN^*$$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout $n \ge 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente .

3°/ Soit (v_n) la suite définie sur IN^* par :

$$v_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) .$$

Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 5 ©

1°/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\,\text{Log } x .$$

a) Etudier les variations de g . Calculer g (1).

b) En déduire le signe de g (x) pour $x > 0$.

2°/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\text{Log } x}{x^2}$.

a) Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que la droite D : y = x –1 est une asymptote à la courbe ξ de f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer qu'il existe un point A de ξ où la tangente à ξ est parallèle à D. Tracer ξ et D.

EXERCICE 6

Soient f et g les fonctions définies par ;

$$\begin{cases} f(x) = -x \text{ Log } x - (1-x) \text{ Log } (1-x) \quad \text{si } x \in]0,1[\\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

et $g(x) = \text{Log } (1-x) - \text{Log } x$; pour $x \in]0,1[$

1°/ Résoudre l'équation g (x) = 0 et étudier le signe de g (x)

pour $x \in]0,1[$.

2°/ Soit ξ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que la droite D : $y = \frac{1}{2}x$ est un axe de symétrie de ξ.

3°/ Etudier f et construire ξ.

4°/ Montrer que si a et b sont deux réels de $]0,+\infty[$ alors on a :

$$a \text{ Log } \frac{1}{a} + b \text{ Log } \frac{1}{b} \leq \text{Log } 2$$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x \operatorname{Log}(x + \frac{1}{x})$ si $x > 0$

$f(0) = 0$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°/On considère la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par :

$g(x) = x \operatorname{Log} x$ et Γ la courbe de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Etudier g et tracer Γ.

3°/ Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Montrer que les courbes ξ de f et Γ de g sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

4°/ Déterminer f' et f'' puis étudier les variations de f'.

Montrer que $f'(x) \geq 0$.

5°/ Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe ξ dans le même repère.

EXERCICE 8

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = 1 + \frac{\operatorname{Log} x}{x}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°/ 1°/ Calculer $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$. Déterminer les asymptotes de ξ_f.

2°/Dresser le tableau de variation de f .

3°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution

$\alpha \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$

4°/ Déterminer le signe de f (x) suivant les valeurs de x.

5°/ Tracer ξ_f .

B°/ 1°/ Déterminer une équation de la tangente T à ξ_f au point d'abscisse 1.

2°/ Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$\varphi(x) = x - x^2 + \text{Log } x$.

a) Déterminer le sens de variation d φ .

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$.

c) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$

d) Etudier la position relative de T et ξ_f .

C°/ 1°/ Soit a un réel de l'intervalle $]\frac{1}{e}, a[$ et on note A le point de ξ_f d'abscisse a .

a) Donner une équation de la tangente T_a à ξ_f en A en fonction de a , $f'(a)$ et $f(a)$.

b) Soit b l'abscisse du point d'intersection de T_a et (x'x) .
Ecrire b en fonction de a , $f'(a)$ et $f(a)$.

2°/ On considère la fonction h définie sur $]\frac{1}{e}, a[$ par :

$h(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$.

a) Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x).f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $]\frac{1}{e}, \alpha[$.

c) En déduire que h est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}, \alpha[$.

Monter alors, que $a < \alpha$.

d) Etudier le signe de $h(x) - x$ sur $]\frac{1}{e}, \alpha[$.

e) En déduire que : $\frac{1}{e} < a < b < \alpha$

3°/ a) Montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{e}, \alpha[$ on a : $h(x) \in]\frac{1}{e}, \alpha[$.

b) On considère la suite (a_n) définie par :

a_0 et $a_{n+1} = h(a_n)$ pour tout $n \in IN$.

Montrer que (a_n) est une suite croissante.

EXERCICE 9 ©

1°/ Résoudre dans IR :

- $e^x + 2e^{-x} = 3$
- $e^{2-x}\, e^{x^2} = 2$
- $e^{2x} - e^x - 2 < 0$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$x \mapsto \text{Log}(e^{x^2} - 2e^{-2x^2}).$$

2°/ Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 1 - x e^x$
- $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
- $f(x) = \cos(e^x)$
- $f(x) = \text{Log}(1 + e^x)$
- $f(x) = \frac{\text{Log}(e^x + 1)}{e^x}$

EXERCICE 10 ©

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue sur IR.

2°/ Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3°/ a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle que l'on précisera.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$, puis construire la courbe ξ' de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 11 ©

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1°/ a) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2°/ Soit a un réel de $]0,+\infty[$ et on pose :

$$h(x) = \left(\frac{e^a - 1 - a}{a^2}\right)x^2 - e^x + 1 + x \ .$$

a) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, a[$ tel que :

$$\frac{e^a - 1 - a}{a^2} = \frac{e^c - 1}{2c} \quad \text{puis calculer : } \lim_{a \to 0^+} \frac{e^a - 1 - a}{a^2}.$$

b) En déduire que f est dérivable à droite en 0 .

c) Préciser la demi-tangente à la courbe ξ de f au point A (0,1).

Construire ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$.

1°/ Montrer que l'équation f (x) = x admet une seule solution

$$a > 0 \ \text{et que} : \frac{5}{4} \le a \le \frac{3}{2} \ .$$

2°/ Soit $I = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ .Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $\left| f'(x) \right| \le \frac{1}{2}$.

3°/ Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $u_n \in I$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\left| u_{n+1} - a \right| \le \frac{1}{2} \left| u_n - a \right|$.

c) En déduire que pour tout n $\in$ IN on a : $\left| u_n - \alpha \right| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$ et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 13 ©

On considère la fonction f définie par : f (x) = Log (x² - 2 x +2)

A°/-1°/Montrer que le domaine de définition de f est IR. Etudier les variations de f

2°/ a) Montrer que la droite D : x = 1 est un axe de symétrie de ξ_f

b) Préciser les tangentes à ξ_f aux points d'abscisses 0 et 2 .

3°/a) Etablir que pour tout x $\in$ IR*, on a :

$$f(x) = 2 \text{ Log } |x| + \text{Log } (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}) .$$

b) Etudier les branches infinies à ξ_f et tracer ξ_f dans un

repère orthonormé.

4°/Soit h la restriction de f à $]1, +\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

b) Prouver que pour tout x $\in$ $]0, +\infty[$ on a :

$$h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x - 1} .$$

c) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère .

B°/-On pose pour x $\in$ IR ; $\varphi(x) = f(x) - x$.

1°/Prouver que pour x > 0 on a :

$\varphi(x) = 2\text{Log } x + \text{Log } (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}) - x$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$

2°/ Dresser le tableau de variation de φ et montrer que φ est une bijection de IR dans IR .

3°/En déduire que la droite Δ : y = x coupe ξ_f en un seul point

d'abscisse α , tel que : $\alpha \in]\, 0{,}3\,;\, 0{,}4\, [$.

C°/ Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par: g (x) = Log (h^{-1}(x)– 1)

1°/ a) Vérifier que pour tout x $\in$ $]0,+\infty[$ on a :

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(e^{x} - 1)\,.$$

b) Calculer g'(x) pour x > 0.

Dresser le tableau de variation de g.

Calculer g (Log 2).

c) Etablir que pour x > 0 on a : $g(x) = \dfrac{x + \mathrm{Log}\,(1 - e^{-x})}{2}$.

Montrer que la droite Δ' : $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à ξ_g au voisinage de $+\infty$.

d) Etudier la position relative de ξ_g et Δ' .

2°/ Vérifier que $g(\alpha) = \mathrm{Log}\,(1 - \alpha)$; (α est le réel défini dans B°/3°/) puis vérifier que : $g'(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{2\alpha^2 - 4\alpha + 2}$.

EXERCICE 14 ©

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \mathrm{Log}\,(1 + e^{-x})$.

A°/1°/ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ Prouver que pour tout réel x on a :

$$f(x) = -x + \mathrm{Log}\,(1 + e^{x})\,,$$

et déterminer l'asymptote D de ξ_f en $-\infty$.

4°/ Tracer ξ_f et D dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B°/ Soient u et v les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$u(t) = \text{Log}(1+t) - t \text{ et } v(t) = \text{Log}(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

1°/ Etudier les variations de u et v .

En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a :

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leq \text{Log}(1+t) \leq t$$

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

a) Démontrer que : $\frac{1-e^n}{e-1} - \frac{1}{2}\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}$.

b) On admet que la suite (S_n) est convergente vers l.

Prouver que : $\left|1 - \frac{1}{e-1}\right| \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$.

CORRECTION

EXERCICE 1

1°/ • $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\,\mathrm{Log}(x+1) - \sqrt{x}\,\mathrm{Log}\,x\right)$

on a : $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\,\mathrm{Log}(x+1)\right) = 0$ et pour $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{Log}\,x$;

on pose $X = \sqrt{x}$;on a donc $x = x^2$ et si x tend vers 0^+ alors X l'est aussi .

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{Log}\,x = \lim_{X\to 0^+} X\,\mathrm{Log}\,X^2 = \lim_{X\to 0^+} 2X\,\mathrm{Log}\,X = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0.$

• $\lim_{x\to 0^+} x^n\,\mathrm{Log}\,x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1}\,x\,\mathrm{Log}\,x = 0 \quad (n \geq 2).$

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Log}(\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Log}(\cos x) - \mathrm{Log}(\cos 0)}{x - 0} = f'(0)$ avec

$f : x \mapsto \mathrm{Log}\,(\cos x)$.

$f'(x) = \mathrm{tg}\,x$ et donc $f'(0) = 1$ donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Log}\,(\cos x)}{x} = 1$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(x^2+1)}{x} = f'(0)$; avec $f(x) = \mathrm{Log}(x^2+1)$ donc $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

donc $f'(0) = 0$ d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(x^2+1)}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\left(x^2\left(+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,x^2 + \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\mathrm{Log}\,x}{x} + \frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{Log } x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\text{Log } X^{\frac{1}{n}}}{X}$ avec $X = x^n$.

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{n \text{ Log } X}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [x - \text{Log}(x^2+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,[1 - \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x}] = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\text{Log } x}{x} + \frac{\text{Log}(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x \text{ Log } (\frac{2x+1}{2x+3})$. On pose $X = \frac{2x+1}{2x+3}$ alors $2X\,x + 3\,X = 2\,x + 1$

Donc $x\,[2X-2] = 1 - 3\,X$, donc $x = \frac{1-3X}{2(X-1)}$

Si x tend vers $+\infty$ alors $X = \frac{2x+1}{2x+3}$ tend vers 1.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x \text{ Log } (\frac{2x+1}{2x+3}) = \lim\limits_{X\to1} (1-3X) \frac{\text{Log } X}{X-1} = -2.$

2°/ • (E) : Log(x+1) + Log(x+3) = Log(x-4) ; Il faut que $x + 1 > 0$,

$x + 3 > 0$ et $x - 4 > 0$; soit $x \in]-1, +\infty[$

On a donc (E) $\Leftrightarrow$ Log [(x+1) (x+3)] = Log(x-4) $\Leftrightarrow x^2+4x+3 = x-4$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 7 = 0$ et on a : $\Delta = 9 - 28 < 0$; donc $S_{IR} = \phi$.

• (E) : 2Log (x-2) = Log (x+3)

l'équation (E) à un sens si et seulement si $x - 2 > 0$ et $x + 3 > 0$; donc $x \in]2, +\infty[$

(E) $\Leftrightarrow$ $\text{Log}(x-2)^2 = \text{Log}(x+3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$

soit $\Delta = 25 - 4 = 21$; donc $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ ou $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ et comme

$x \in]2, +\infty[$. donc $S_{IR} = \{ \frac{5+\sqrt{21}}{2} \}$.

• (E) : $(\text{Log } x)^2 - 3 \text{ Log } x + 2 = 0$

l'équation (E) à un sens si et seulement si $x > 0$

on pose $X = \text{Log } x$ on obtient :

$X^2 - 3X + 2=0$ donc $X = 1$ ou $X = 2$. $Donc $\text{Log } x = 1$

$\Leftrightarrow$ $x = e$ et $\text{Log } X = 2$ $\Leftrightarrow$ $x = e^2$. Donc $S_{IR} = \{ e, e^2 \}$.

• (E) : $(\text{Log } x)^2 - \text{Log } x = 0$. (E) à un sens si et seulement si $x > 0$.

On pose $X = \text{Log } x$

on a donc $X^3 - X = 0$ soit $X(X^2-1) = 0$ donc $X = 0$ on $X = 1$ ou

$X = -1$ donc $\text{Log } X = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\text{Log } X = 1$

$\Leftrightarrow$ $x = e$ ou $\text{Log } X = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc : $S_{IR} = \{1, e, \frac{1}{e}\}$.

3°/ (I) :$\text{Log}(x^2-x) + \text{Log} (\frac{1}{3x+4}) < 0$.

l'inéquation (I) à un sens pour : $x^2 - x > 0$; $\frac{1}{3x+4} > 0$ et $3x + 4 \neq 0$.

soit donc $x \in]-\frac{4}{3}, 0[\cup]1, +\infty[$

(I) $\Leftrightarrow$ $\text{Log } (x^2-x) - \text{Log } (3x+4) < 0$ $\Leftrightarrow$ $\text{Log} (\frac{x^2-x}{3x+4}) < 0$

$\Leftrightarrow$ $0 < \frac{x^2-x}{3x+4} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{3x+4} - 1 < 0$ donc $\frac{x^2 - 4x - 4}{3x + 4} < 0$; Soit $x^2 - 4x - 4 = 0$.

$\Delta = 16 + 16 = 32$ donc x' = $\frac{4x + \sqrt{32}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ et x'' = $2-2\sqrt{2}$

donc $S_{IR} =]2 - 2\sqrt{2}, 0[\cup]1, 2 + 2\sqrt{2}[$

* (I) : $3\text{Log}(x-1) \leq \text{Log}(x-1)$; (I) à un sens si et seulement si : $x > 1$

on a donc $\text{Log}(x-1)^3 - \text{Log}(x-1) < 0$ donc $\text{Log}(x-1)^2 < 0$

d'ou $(x-1)^2 < 1$ d'où $(x-1)^2 - 1 < 0$ soit donc $x(x-2) < 0$,

donc $S_{IR} =]-1, 2[$.

EXERCICE 2

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$; $x \in IR$; F est la primitive de f telle que F(0) = 0

1°/ a) Montrons que pour tout $x \in IR_+$ on a : $F(x) \geq \text{Log}(2x+1)$

Soit $\varphi(x) = F(x) - \text{Log}(2x + 1)$ pour $x \geq 0$.

On a φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = f(x) - \frac{2}{2x+1}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{2}{2x+1}$$

$$= \frac{4x + 2 - 2\sqrt{1+4x^2}}{(2x+1)\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\varphi'(x) = 2\,\frac{(2x+1)^2 - (1+4x^2)}{(2x+1)\sqrt{1+4x^2}\,(2x+1+\sqrt{1+4x^2})}$$

$$= \frac{8x}{(2x+1)\sqrt{1+4x^2}\,(2x+1+\sqrt{1+4x^2}} \geq 0$$

donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$.

et $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0$ on a $\varphi(x) \geq 0$, donc $F(x) \geq \text{Log}(2x + 1)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}(2x + 1) = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison des limites on a

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

b) Montrons que F est impaire.

on a : F est la primitive de f sur IR donc $F' = f$ et comme f est paire alors F est impaire .
On a F est impaire donc pour $x > 0$, on pose $x = -t$ alors $F(-t) \geq \text{Log}(-2t + 1)$, donc $-F(t) \geq \text{Log}(-2t + 1)$

donc $F(t) \leq -\text{Log}(-2t + 1)$.

Donc si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $-\infty$ et on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(t) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} -\text{Log}(-2t + 1)$ (d'après T.C.L)

et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} -\text{Log}(-2t+1) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} F(t) = -\infty$

2°/ $G(x) = \text{Log}(2x + \sqrt{1+4x^2})$; $x \in IR$

a) Montrons que $\forall x \in IR$ on a $G(x) = F(x)$.

Soit $G'(x) = \dfrac{2 + \dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{1+4x^2} + 4x}{\sqrt{1+4x^2}}}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}} = f(x)$.

donc $G'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur IR

Or $G(0) = 0$ et comme la primitive de f qui s'annule en 0 est l'unique fonction F donc $G(x) = F(x)$ $\forall x \in IR$

b) Soit $F'(x) = f(x) > 0$ $\forall x \in IR$. Donc F est strictement croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR dans $F(IR) = IR$

3°/ H est la primitive de $x \mapsto \dfrac{3x + 5}{\sqrt{1+4x^2}}$ telle que $H(0) = \dfrac{3}{4}$.

Soit $h(x) = \dfrac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1+4x^2}} + \dfrac{5}{\sqrt{1+4x^2}}$

$= \dfrac{3}{4}\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}} + \dfrac{5}{2}\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$.

- une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ est $x \mapsto \sqrt{1+4x^2} + k$

- une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$ est $x \mapsto F(x) + k'$.

Donc $H(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{1+4x^2} + \dfrac{5}{2}F(x) + k''$; $H(0) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow k'' = 0$.

Donc $H(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{1+4x^2} + \dfrac{5}{2}F(x)$; $\forall x \in IR$.

EXERCICE 3

1°/ $f(x) = x - 1 - \text{Log } x$; $x > 0$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\text{Log } x}{x}\right) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	–	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2°/ La fonction f admet un minimum absolu en 1 égal à 0 donc

$\forall\, x > 0$.

on a : $f(x) \geq f(1) = 0$; donc $f(x) \geq 0 \ \ \forall x > 0$ d'où $x - 1 - \text{Log } x \geq 0$

alors $\text{Log } x \leq x - 1 \ ; \forall x > 0$

3°/ On a $u_k = \frac{x_k}{M}$, k=1,2,….,n avec $M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

a) on a $\text{Log } x \leq x-1$ et pour $x = u_k$ on a : $\text{Log}\left(\frac{x_k}{M}\right) \leq \frac{x_k}{M} - 1$

Donc $\text{Log } x_k - \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \dfrac{x_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k} - 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k - \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k} - n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k - n \text{ Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k \leq n \text{ Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

D'ou : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k \leq \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

b) d'après a°) on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \text{Log } x_k \leq \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k^{\frac{1}{n}} \leq \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

donc $\text{Log}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}\right) \leq \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

on applique la fonction $x \mapsto e^x$, croissante sur]0, +∞[,

on obtient : $(x_1.x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$

$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ donc $\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Pour $x_k = k$ on obtiens $\sqrt[n]{1.2.3...n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n}\frac{1}{2}(n+1) \leq \frac{n+1}{n}$

Donc $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{n} \Rightarrow n! \leq (\frac{n+1}{n})^n$

EXERCICE 4

1°/Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \text{Log}(x + 1) - x$; f est dérivable sur [0,+∞[et on a :$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$

Donc $f'(x) \leq 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)\left[\frac{\text{Log}(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right] = -\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}(x+1)}{x+1} = 0$ et $f(0) = 0$

x	0	$+\infty$
f'(x)	–	
f(x)	0	↘

$f(x) \leq 0 \ \forall\ x \geq 0 \ \Rightarrow \text{Log}\,(x+1) \leq x$

◦ De même ; soit $g(x) = \text{Log}(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x^2 + x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

donc $g'(x) \geq 0$ d'ou g est croissante et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 0$

donc $\forall x \geq 0$ on a $g(x) \geq 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}\,(x+1)$

donc $\forall\ x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}\,(x+1) \leq x$.

2°/ $u_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Log}(1 + \frac{k}{n^2})$; $n \geq 1$

a) * $u_1 = \text{Log}(1 + \frac{1}{1^2}) = \text{Log}\,2$

* $u_2 = \text{Log}(1 + \frac{1}{4}) + \text{Log}(1 + \frac{2}{4}) = \text{Log}\,\frac{5}{4} + \text{Log}\,\frac{3}{2} = \text{Log}\,\frac{15}{8}$

b) Montrons par récurrence que P_n :

$\forall\ n \geq 1$ on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

* Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1$ et $\frac{1.(1+1).(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$;

d'où P_1 et vraie.

* Soit $n \geq 1$ On suppose que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} l'est aussi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

on a : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Or $2n^2+7n+6 = 0$; on a $\Delta = 49 - 48 = 1$ alors :

$n = \frac{-7-1}{4} = -2$ ou $n = -3$.

donc $2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$;

donc $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ d'où P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1$ on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Montrons que (u_n) est convergente :

D'après 1°/ on a : $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \text{Log}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

Donc $\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$.

Et d'après le théorème de comparaison des limites On a : $\lim_{n\to+\infty} [\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}]$

$\leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}$

d'ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

La suite (U_n) est donc convergente vers $\frac{1}{2}$.

3°/ $\forall n \in IN^*$ on a $V_n = (1+\frac{1}{n^2})\,(1+\frac{2}{n^2}) \ldots (1+\frac{n}{n^2}) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$.

Soit $t_n = \text{Log } V_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\,(1+\frac{k}{n^2}) = u_n$. Donc $u_n = \text{Log } V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{e}$.

La suite (V_n) est donc convergente vers $\sqrt{e}$.

EXERCICE 5

1°/ $g(x) = x^3 - 1 + 2\text{Log } x$; $\forall x > 0$

a) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$; $\forall x > 0$. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x(x^2 - \frac{1}{x} + \frac{2\text{Log } x}{x}) = +\infty$

et $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty$; g est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) $g(1) = 0$ donc : $\forall x \in]0,1[$ on a $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$

on a : $g(x) > 0$.

2°/ $f(x) = x - 1 - \frac{\text{Log } x}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$.

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{x^2 \frac{1}{x} - 2x \operatorname{Log} x}{x^4} = 1 - \dfrac{1 - 2\operatorname{Log} x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\operatorname{Log} x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

le signe de f'(x) est celui de g(x) $\forall x > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^2})$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} \sqrt{t}}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{2} \dfrac{\operatorname{Log} t}{t} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\operatorname{Log} x}{x^2} = -\dfrac{-\infty}{0^+} = +\infty$.

Soit donc le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	–	0	+	
	$+\infty$				$+\infty$
f(x)	‖	↘	0	↗	

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} - \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^2} = 0$ (d'après a)) , donc la droite

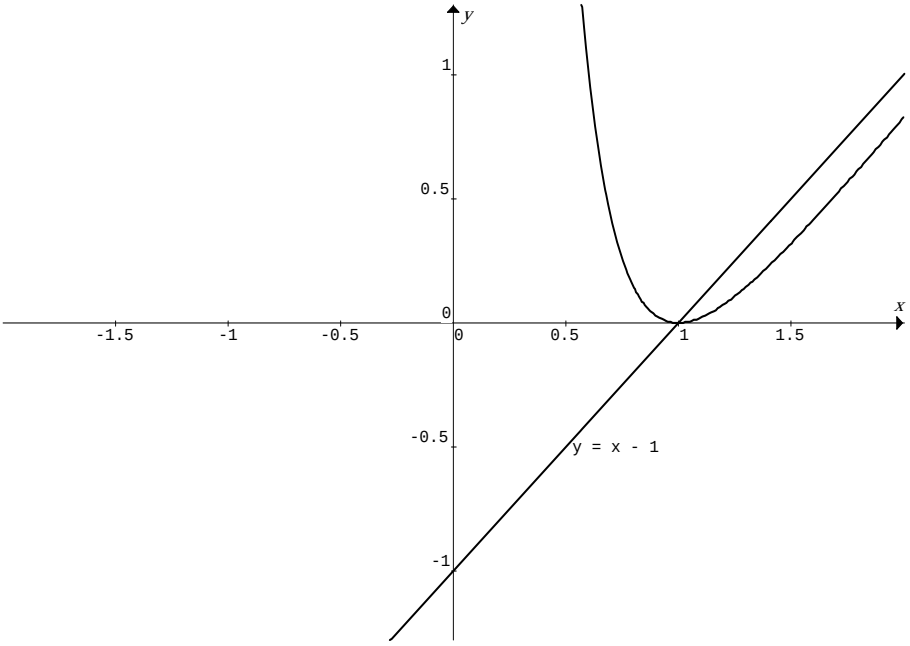
D : y = x -1 est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$.

c) Soit $A(x_o, y_o)$ et T la tangente à ζ au point A.

T est parallèle à D signifie $f'(x_o) = 1$

Donc $\frac{g(x_o)}{x_0^3} = 1$ alors $x_o = \sqrt{e}$. Donc au point A($\sqrt{e}$,f($\sqrt{e}$)) la tangente à ζ_f est parallèle à

D. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à ζ_f



EXERCICE 9

1°/ • $e^x + 2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 3e^x + 2}{e^x} = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3\,e^x + 2 = 0.$

On pose $t = e^x$, On a donc $t^2 - 3t + 2 = 0$ donc $t = 1$ ou $t = 2$

soit donc $x = 0$ ou $x = \text{Log}2$. Donc $S_{IR} = \{0, \text{Log}2\}$.

- $e^{2-x}.\, e^{x^2} = 2 \Leftrightarrow e^{x^2 - x + 2} = 2$ donc $x^2 - x + 2 = \text{Log}2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 - \text{Log}2 = 0.$

Soit $\Delta = 1 - 4(2 - \text{Log}2) = 4\text{Log}2 + 1 - 8 < 0$. Donc $S_{IR} = \emptyset$.

- $e^{2x} - e^x - 2 < 0$; On pose $t = e^x$ on obtient :
  $t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) < 0.$

donc $t^2 - t - 2 < 0$ signifie que $t \in]-1, 2[$.

donc $-1 < e^x < 2 \Rightarrow 0 < e^x < 2 \Rightarrow x \in]0, \text{Log}2[$

donc $S_{IR} =]0, \text{Log}2[$.

- Soit $f(x) = \text{Log}(e^{x^2} - 2e^{-2x^2})$.

f(x) à un sens si et seulement si $e^{x^2} - 2e^{-2x^2} > 0$

donc $e^{x^2} - \frac{2}{e^{2x^2}} > 0.$

D'où $\frac{e^{3x^2} - 2}{e^{2x^2}} > 0$,soit donc $e^{3x^2} > 2$ et par suite $3x^2 > \text{Log}2$

$\Rightarrow x^2 > \frac{1}{3}\text{Log}2.$

$\Rightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{\text{Log}2}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{\text{Log}2}{3}}, +\infty\right[$.

2°/ • $f(x) = 1 - x e^x$; $x \in IR$.

f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = -(xe^x + e^x)$.

donc $f'(x) = -xe^x - e^x = -e^x(x+1)$; $\forall x \in IR$.

* $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$; $x \in IR \setminus \{-1\}$.

* La fonction f est dérivable sur $IR\setminus\{-1\}$;($x \mapsto e^x$ dérivable sur IR et donc sur $IR\setminus\{-1\}$ $x \mapsto x+1$ dérivable sur $IR\setminus\{-1\}$ et $x+1 \neq 0$) .

$$f'(x)= \frac{e^{x}(x+1)-e^{x}}{(x+1)^2} = \frac{xe^{x}}{(x+1)^2}.$$

* $f(x) = \cos(e^x)$; $x \in IR$.

* f est la composée de deux fonctions dérivables sur IR donc f est dérivable sur IR et on a :

$f(x) = - e^x \sin(e^x)$.

* $f(x) = \text{Log}(1 + e^x)$; $\forall\ x \in IR$. f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x) = \frac{e^{x}}{e^x+1}.$$

* $f(x) = \dfrac{\text{Log}(e^{x}+1)}{e^{x}}$; $\forall\ x \in IR$.

f est dérivable sur IR (composée et quotient des fonctions dérivables sur IR) et on a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}e^{x}-e^{x}\text{Log}(e^{x}+1)}{e^{2x}} = \frac{e^{x}-(e^{x}+1)\text{Log}(e^{x}+1)}{e^{x}(e^{x}+1)} ;\ \forall\ x \in IR.$$

EXERCICE 10

$$f(x) = \begin{cases} 1- e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°/* $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0)$

et $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (1- e^{-x}) = 0 = f(0)$.

donc $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

* La fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est continue sur IR et par suite elle est continue sur $]-\infty, 0[$

La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur IR et la fonction $x \mapsto e^x + 1$ est aussi continue sur IR et : $e^x + 1 \neq 0 \quad \forall x \in IR$.

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est continue sur IR et par suite elle est continue sur $]0, +\infty[$,

donc f est continue sur IR^*

Conclusion : f est continue sur IR.

2°/ $\lim_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{e^x - 1}{x} \dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2}$;

car $\lim_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \dfrac{1}{2}$ d'où la courbe ξ de f possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

$\lim_{x\to 0-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x\, e^x} = 1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$ d'où la courbe ξ de f possède une demi-tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = x$. Donc f n'est pas dérivable en 0 et le point O est un point anguleux pour la courbe ξ de f.

3°/ a) $\forall x \in IR^*$ on a $f'(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

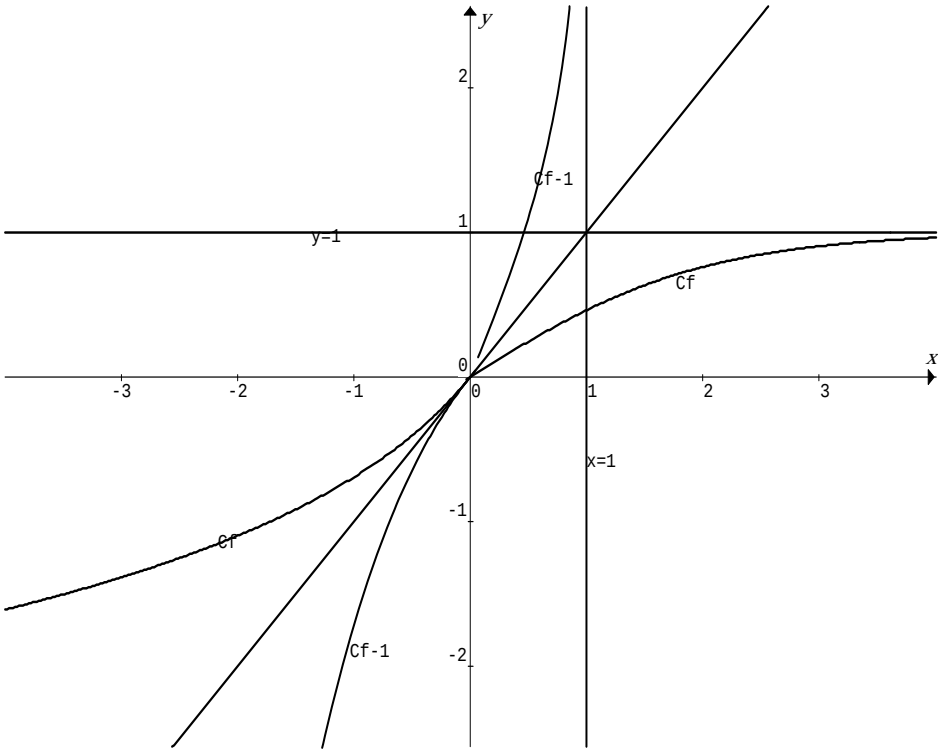
donc $f'(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \end{cases}$

$\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ si $x > 0$

donc $\forall x \in IR^*$ on a $f'(x) > 0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-e^{-x}) = -\infty$; donc la courbe ξ de f possède une branche infinie parabolique (en $-\infty$) de direction la droite $(o\ \vec{j})$.

La droite $y = 1$ est une asymptote horizontale à ξ en $+\infty$.



b) La fonction f est continue et strictement croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR dans IR.

c) pour $x \in]-\infty, 0[$ on a :

$y = f(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow 1 - y = e^{-x} \Rightarrow -x = \text{Log}(1-y)$,

donc $x = \text{Log}\left(\frac{1}{1-y}\right)$; $\forall x \in]-\infty, 0[$

pour $x \in [0, +\infty[$ on a : $y = f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y e^x + y = e^x - 1$

donc $e^x [y-1] = -y-1$ donc $e^x = \frac{y+1}{1-y}$ d'où $e^x \; x = \text{Log}\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$

$\forall y \in [0, +\infty[$

ainsi $f^{-1}(x) = \begin{cases} \text{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La courbe ξ' de f^{-1} est la symétrique de ξ par rapport à la droite

$\Delta : y = x$; d'où ξ' possède une branche infinie parabolique de direction $(o\,\vec{i})$ en $(-\infty)$ et la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

EXERCICE 11

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1°/ a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur IR ; par suite elle est continue sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x$ et continue sur $]0, +\infty[$ et $x \neq 0$ sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc f est continue sur $[0, +\infty[$

b) la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur IR et par suite sur

]0, +∞[

et donc f : $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est dérivable sur]0, +∞[(car $x \mapsto x$ l'est aussi

et non nul) donc f est dérivable sur]0, +∞[et on a :

$f'(x) = \frac{x\,e^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2}$; $\forall x \in]0, +\infty[$.

2°/ a > 0 et $h(x) = (\frac{e^x - 1 - a}{a^2})\, x^2 - e^x + 1 + x$; pour tout $x \geq 0$.

a) En appliquant l'égalité des accroissements finis à h sur [0, a]

on a : il existe $c \in]0, a[$ tel que $\frac{h(a) - h(0)}{a - a} = h'(c)$

donc $\frac{0}{a} = 2.\ \frac{e^x - 1 - a}{a^2}\ c - e^c + 1$

donc $e^c - 1 = \frac{e^a - 1 - a}{a^2}.(2c) \Rightarrow \frac{e^c - 1}{2c} = \frac{e^a - 1 - a}{a^2}$

$\lim\limits_{a \to 0^+} \frac{e^a - 1 - a}{a^2} = \lim\limits_{c_a \to 0} \frac{e^{ca} - 1}{2c_a} = \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{c_a \to 0} \frac{e^{ca} - 1}{c_a} = 1$

(le réel c dépend de a ; $c \in]0, a[$)

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et f'(0) $= \frac{1}{2}$.

c) la courbe ξ possède au point A(0, 1) une demi-tangente d'équation

$T : y = \frac{1}{2}x + 1.$

on a $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$, $\forall\ x > 0$; le signe de $f'(x)$ est celui de :

$$g(x) = x\,e^x + 1.$$

on a : $g'(x) = e^x + x\,e^x - e^x = x\,e^x \geq 0$

donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$ donc

$\forall\ x \geq 0$ on a $g(x) \geq 0$

donc $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0, +\infty[$

soit donc le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
		$+\infty$
f(x)	↗	

0

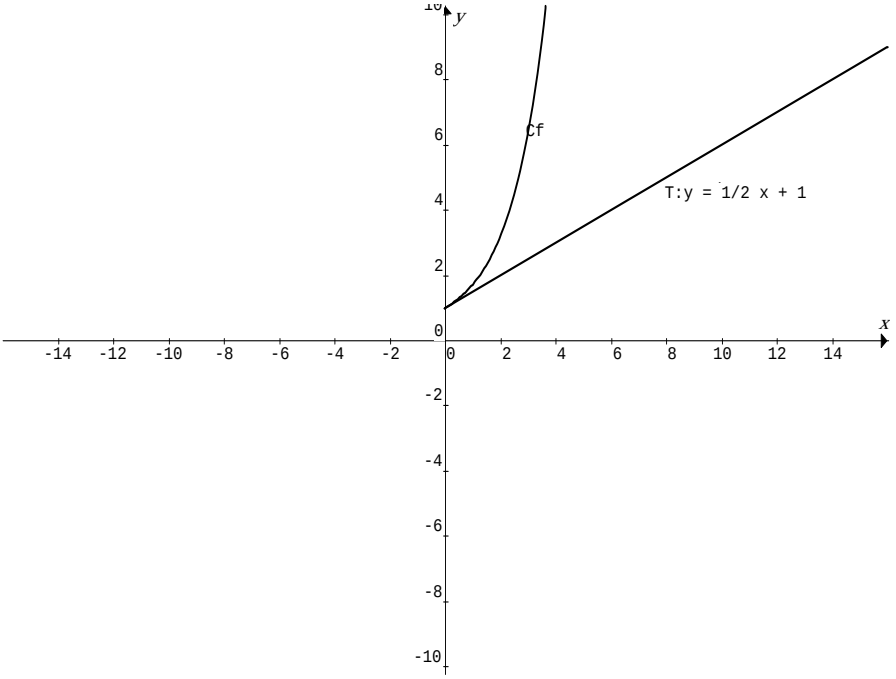
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$.

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; et pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ on pose $x = 2X$ on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{2X}}{4X^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{e^X}{2X}\right)^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc la courbe ξ possède une banche infinie parabolique en $+\infty$ de direction $(o, \vec{j})$



EXERCICE 13

$f(x)= \text{Log}(x^2 - 2x + 2)$.

A°/1°/a) le domaine de définition I de f est :

$$I =\{ x \in IR \text{ tel que : } x^2 - 2x + 2 > 0 \}.$$

Soit l'équation : $x^2 - 2x + 2 = 0$; $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.

donc $\forall x \in IR$ on a $x^2 - 2x + 2 > 0$ d'où I = IR.

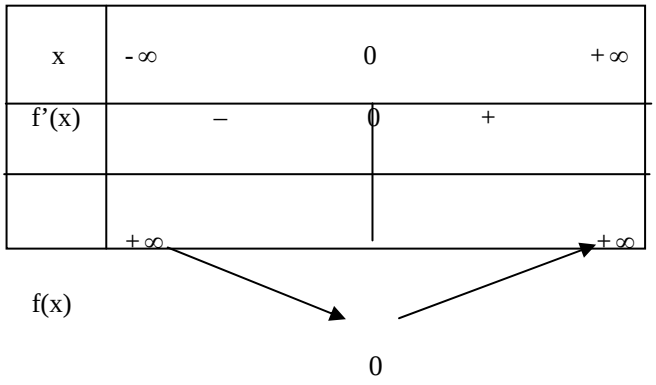
b) Pour tout $x \in IR$ on a, f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}(x^2 - 2x + 2) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty}$ Log x = $+\infty$. de même $\lim_{x \to -\infty}$ f(x) = $+\infty$. f(1) = 0.

Tableau de variation de f :



2°/a) Montrons que la droite D : x = 1

est un axe de symétrie de ξ_f .

$\forall$ x $\in$ IR on a (2-x) $\in$ IR et f(2-x) = Log $\left[(2-x)^2 - 2(2-x) + 2\right]$

=Log (x^2 -2x + 2) = f(x)

donc $\begin{cases} x \in IR \Rightarrow (2-x) \in IR \\ f(2-x) = f(x) \end{cases}$

d'où D : x = 1 est un axe de symétrie de ξ_f .

b) T_0 : tangente à ξ_f au point d'abscisse 0. T_0 :y = f'(0) (x-0) + f(0) ;

donc $T_0 : y = - x + Log2$.

T_2 est la tangente à ξ_f au point d'abscisse 2.

$T_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = x + Log2$.

Donc $T_2 : y = x + Log2$.

3°/a) on a $f(x) = Log(x^2 - 2x + 2)$; pour tout $x \in IR$.

$\forall x \in IR^*$ on a $f(x) = Log\left(x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) = Log\, x^2 + Log\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

or $Log\, x^2 = 2Log\,|x|$; $\forall x \in IR^*$ donc :

$f(x) = 2Log|x| + Log\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$; $\forall x \in IR^*$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; soit donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,Log|x| + Log\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x}$$

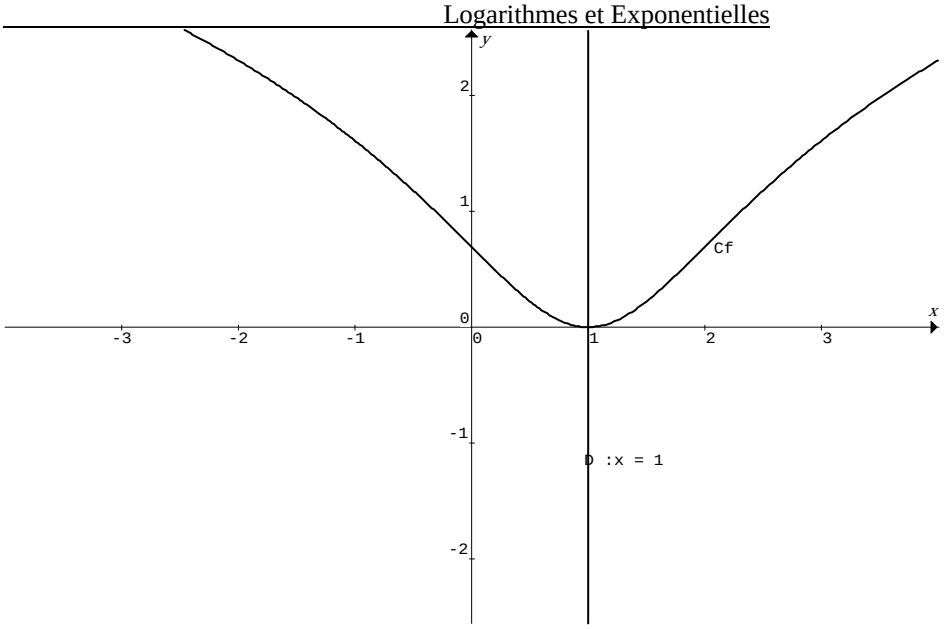
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2Logx}{x} + \frac{Log\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x}$$

Car $|x| = x$ au voisinage de $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Logx}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Log\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} = 0$.

donc ξ_f possède une branche infinie parabolique, en $+\infty$, de direction $(o\vec{i})$.

- Comme la droite D : x = 1 est un axe de symétrie de ξ_f alors au voisinage de $(-\infty)$, ξ_f possède aussi une branche infinie de direction $(o\vec{i})$.



4°/ h est la restriction de f à $]1,+\infty[$.

a) h est donc, continue, et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.

b) On a : $\begin{cases} y = h(x) \\ x \in]1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = h^{-1}(y) \\ y \in]0,+\infty[\end{cases}$

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \text{Log}(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = e^y$;

soit donc :

$x^2 - 2x + 2 - e^y = 0$.

$\Delta = 4 - 4(2 - e^y) = 4(e^y - 1) > 0$ (car $y > 0 \Rightarrow e^y > 1$)

donc $x' = \dfrac{2 - \sqrt{4\left(e^y - 1\right)}}{2} = 1 - \sqrt{e^y - 1}$ ou $x'' = 1 + \sqrt{e^y - 1}$.

On a $y > 1 \Rightarrow e^y > 1 \Rightarrow \sqrt{e^y - 1} > 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{e^y - 1} < 1$

donc $x' < 1$ or on a $\in]1,+\infty[$

donc $x = x'' = 1 + \sqrt{e^{y} - 1}$. D'où $f^{-1}(x) = 1 \sqrt{e^{y} - 1}$; $\forall x \in]1, +\infty[$.

b) La courbe de h^{-1} est la symétrique de ξ_h par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

B°/ $\varphi(x) = f(x) - x$; $\forall x \in IR$.

1°/ $\forall x \in IR^*$ on a $f(x) = 2 \text{ Log } |x| + \text{Log } \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

donc pour $x > 0$ on a $|x| = x$ et $\varphi(x) = 2 \text{ Log } x + \text{Log } \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x$

$$\text{donc } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left[2\frac{\text{Log}x}{x} + \frac{\text{Log}\,(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})}{x} - 1 \right] = -\infty .$$

2°/ La fonction φ est dérivable sur IR et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$$

$$= \frac{-(x^2 - 4x\,4)}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2} < 0 \quad \forall x \in IR.$$

Donc φ est décroissante sur IR. $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - x = +\infty$

Soit donc le tableau de variation de φ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	
	$+\infty$		
$\varphi(x)$		0	
			$-\infty$

La fonction φ est continue et est strictement décroissante sur IR donc c'est une bijection de IR dans IR.

3°/ Soit M (x, y) $\in \xi_f \cap \Delta$: y = x $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = x \\ y = f(x) \end{cases}$

donc f(x) = x $\Leftrightarrow$ f(x) – x = 0 soit donc $\varphi(x) = 0$.

Or φ est une bijection de IR dans IR et $0 \in$ IR donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in$ IR.

Donc $\xi_f \cap \Delta = \{A(\alpha, \alpha)\}$. α est donc la solution de l'équation

$\varphi(x) = 0$

- φ est continue sur IR et donc continue sur $[0{,}3 ; 0{,}4]$.
- $\varphi(0{,}3) = \text{Log}(2, 69) - 0{,}3 > 0$.
- $\varphi(0{,}4) = \text{Log}(1{,}6) - 0{,}4 < 0$.

d'où $\varphi(0{,}3).\varphi(0{,}4) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on $\alpha \in]0{,}3; 0{,}4[$

C°/ $g(x) = \text{Log}(h^{-1}(x) - 1)$; $\forall x \in]0, +\infty[$.

1°/ $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $g(x) = \text{Log}(1 + \sqrt{e^x - 1} - 1) = \text{Log}\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$.

d'où $g_{(x)} = \frac{1}{2}\text{Log}(e^x - 1)$ pour tout x > 0. g est dérivable sur $]0, +\infty[$

et on a : $g'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$; $\forall x \in]0, +\infty[$, donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\text{Log}(e^x - 1) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log } x = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{2} \log (e^x - 1) = -\infty$; Car $\lim\limits_{x\to0^+} e^x - 1 = 0$

et $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log } x = -\infty$. $\quad g(\text{Log}2) = \frac{1}{2} \text{Log } (e^{\text{Log}2} - 1) = \text{Log}1 = 0.$

- $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $g(x) = \frac{1}{2} \text{Log } (e^x - 1) = \frac{1}{2} \text{Log } [e^x (1 - e^{-x})]$

$$= \frac{1}{2} \text{Log } e^x + \text{Log } (1 - e^{-x}).$$

Donc $g(x) = \frac{1}{2} (x + \text{Log } (1 - e^{-x}))$.

- Position relation de ξ_g et Δ : $y = \frac{1}{2} x$.

On a $g(x) - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \text{Log } (1 - e^{-x})$ $\forall x > 0$.

Or $\forall x > 0$ on a $0 < 1 - e^{-x} < 1 \Rightarrow \text{Log } (1 - e^{-x}) < 0$.

donc $g(x) - \frac{1}{2} x < 0$ $\quad \forall x > 0$ donc ξ_g est au–dessous de Δ.

2°/ $g(x) = \frac{1}{2} \text{Log } (e^{-x} - 1)$. Or on a $f(\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \text{Log } (\alpha^2 - 2\alpha + 2) = \alpha$.

d'où $e^\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1$ donc $g(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Log } (\alpha^2 - 2\alpha + 1)$

$$= \text{Log } (\alpha - 1)^2.$$

donc $g(\alpha) = \text{Log } \sqrt{(\alpha - 1)^2} = \text{Log } |\alpha - 1|$ or $\alpha \in]0,3; 0,4[$

$\Rightarrow \alpha - 1 < 0$ d'où $g(\alpha) = \text{Log } (1 - \alpha)$

- $g'(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha^2-2\alpha+2}{\alpha^2-2\alpha+1} = \dfrac{\alpha^2-2\alpha+2}{2\alpha^2-4\alpha+2}$.

EXERCICE 14

$f(x) = \text{Log}(1 + e^{-x})$; pour tant $x \in IR$.

A°/1°/• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}(1 + e^{-x}) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + e^{-x}) = 1$ et

$\text{Log } 1 = 0$. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \text{Log}(1 + e^{-x}) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+ e^{-x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log } x = +\infty$

2°/ La fonction f est dérivable sur IR (composée de deux fonctions dérivables), et on a : f'(x)

$= \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} < 0$ car $e^{-x} > 0$ $\forall x \in IR$.

Soit donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)		–	
f(x)	$+\infty$	↘	

3°/ $f(x) = \text{Log}\,(1 + e^{-x}) = \text{Log}\,(e^{-x}(1 + e^{x})) = \text{Log}\,e^{-x} + \text{Log}\,(e^{x} + 1)$

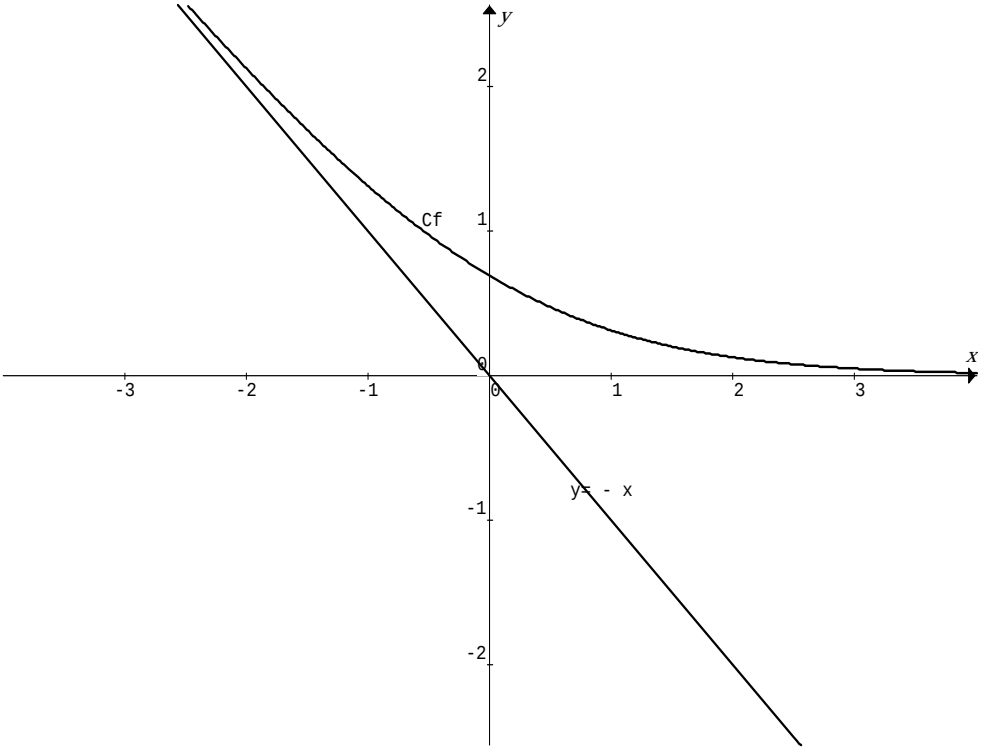
donc $f(x) = -x + \text{Log}\,(1 + e^{x})$.

Soit donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\,(1 + e^{-x}) = 0$

donc la droite D : $y = -x$ est une asymptote oblique à ξ_f en

$-\infty$.

4°/La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à ξ_f en $+\infty$.



B°/u(t) = Log (1+t) –t et v(t) = Log (1+t) – t + $\frac{1}{2}t^2$.

1°) On $\forall\, t > 0$: $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \text{Log}(1+t) \leq t$. (…sens de variation…)

2°) $n \in IN^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

a°) On a $\forall\ t \geq 0$; $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \text{Log}(1+t) \leq t$.

On prend $t = e^{-k}$ on obtient :

$$e^{-k} - \frac{1}{2}e^{-2k} \leq f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} e^{-k} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} e^{-k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-2k} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} e^{-k}.$$

On a : • $\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k$: somme de n termes d'une suite géométrique de raison $q = e^{-1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{e}\,\frac{1-e^{-n}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$.

De même $\sum_{k=1}^{n} e^{-2k} = \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}$.

On a donc $\frac{1-e^{-n}}{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-2n}}{e-1} \leq S_n \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}$.

b°) On admet que la suite (S_n) est convergente vers ℓ.

d'après le théorème de comparaison des limites on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-2n}}{e-1} \leq \ell \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{e-1}.$$

donc $\frac{1}{e-1} - \frac{1}{2(e^2-1)} \leq \ell \leq \frac{1}{e-1}$.

d'où $-\frac{1}{2(e^2-1)} \leq \ell - \frac{1}{e-1} \leq 0$ alors $\left|\ell - \frac{1}{e-1}\right| \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$.